TD Ensembles, Applications

Ensembles

Élémentaires

55M **Exercice 1** Soient A, B, C trois parties de E telles que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.

TJ6 **Exercice 2** Pour A, B deux parties de $\mathbb{R}$, on définit la somme $A + B = \{a + b\ ,\ a \in A, b \in B\}$; si $k \in \mathbb{Z}$, on note $k\mathbb{Z} = \{ka\ ,\ a \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer les sommes suivantes. Justifier brièvement chaque inclusion.

1. $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}$
2. $\mathbb{R}_+ + \mathbb{R}_-$
3. $\mathbb{Q} + \overline{\mathbb{Q}}$
4. $2\mathbb{Z} \cup 4\mathbb{Z}$
5. $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$
6. $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$

EQW **Exercice 3** Soient A, B, C, D quatre parties d'un ensemble. On suppose que $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \emptyset$ et $A \cup B = C \cup D$. Montrer que $A = C$ et $B = D$.

B2C **Exercice 4** Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + y = 1\}$ et $B = \{(t - 1, -3t + 4),\ t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A = B$.

3I1 **Exercice 5** Pour $A, B \subset E$, montrer que $A \subset B \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(E),\ A \cap X \subset B \cap X$.

Ensembles de racines de l'unité

K35 **Exercice 6** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_{n+1} = \{1\}$.

L8P **Exercice 7**

1. À quelle CNS sur $d, n \in \mathbb{N}^*$ a-t-on $\mathbb{U}_d \subset \mathbb{U}_n$?
2. Montrer que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_{\mathrm{pgcd}(n,m)}$.

KV2 **Exercice 8** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair. Montrer que $\{\omega^2,\ \omega \in \mathbb{U}_n\} = \mathbb{U}_n$.

Unions, intersections quelconques

7ZZ **Exercice 9** Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ deux familles d'ensembles. Comparer pour l'inclusion

1. $C = \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)$ et $D = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i)$
2. $E = \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right)$ et $F = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B_i)$

5Q8 **Exercice 10** ★ Limites supérieure et inférieure Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E. On définit

$$\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

Décrire simplement les éléments de $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Sur les parties

1II **Exercice 11** Soient A, B deux parties de E. Quelles assertions n'ont, en général, pas de sens ?

1. $A \in B$
2. $A \subset \mathcal{P}(E)$
3. $A \subset B$
4. $A \in \mathcal{P}(B)$
5. $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$

TFQ **Exercice 12** Soient A, B deux parties d'un ensemble fini E. On cherche les ensembles X vérifiant l'équation $(E)\colon A \cup X = B$.

1. Donner sans justification une CNS pour que (E) admette des solutions.
2. On suppose que cette condition est vérifiée.
   a) Expliciter la forme des solutions de (E).
   b) Quel est le nombre de solutions de (E), en fonction de $|A|$ et $|B|$?

F00 **Exercice 13** ★ Soit A une partie finie de $\mathbb{R}$ de cardinal n. On note $A + A = \{a + a',\ (a, a') \in A^2\}$.

1. Montrer que $2n - 1 \leq |A + A| \leq \frac{1}{2}n(n + 1)$
2. Donner un exemple où la majoration est une égalité.
3. ★ Montrer que la minoration est atteinte si et seulement si les éléments de A sont en progression arithmétique.

Applications

1II **Exercice 14** Soient A, B deux parties de E. Soit $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et $A \subset \mathbb{N}$. Quelles notations n'ont, en général, pas de sens ?

1. $f \circ (f(n))$
2. $(f \circ f)(n)$
3. $f(A)$
4. $f^{-1}(n)$
5. $f^{-1}(A)$

XNV **Exercice 15** Soit $f\colon x \mapsto \frac{3x+1}{x+1}$. Déterminer $f\big(]-1{,}1[\big)$ et $f^{-1}\big([2{,}3]\big)$.

X29 **Exercice 16** Soit $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, g est surjective.

48C **Exercice 17** Étudier l'injectivité et la surjectivité de la fonction suivante :

1. $g_1\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n + 1 \end{array}$
2. $g_2\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{U} & \to & \mathbb{U} \\ z & \mapsto & z^2 \end{array}$
3. $g_3\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{array}$
4. $g_4\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, xy) \end{array}$

B40 **Exercice 18** Soit $f\colon z \mapsto z + \frac{1}{z} \quad \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$.

1. Expliciter $f(\mathbb{R}^*)$, $f(\mathbb{U})$.
2. f est-elle injective ?
3. ★ f est-elle surjective ?

Indication : *Pour la surjectivité, tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées, donc toute équation du second degré admet des solutions (pourquoi ?).*

3YS **Exercice 19** On considère $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$, $\varphi\colon \begin{array}{ccc}\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\ M & \mapsto & AM\end{array}$ et $\psi\colon \begin{array}{ccc}\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\ M & \mapsto & BM\end{array}$.

1. On note $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ la matrice nulle. Expliciter $\varphi^{-1}(\{O_2\})$ et $\varphi(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$, sous forme de paramétrisations simples.
2. La fonction φ est-elle injective ? surjective ? Justifier.
3. Montrer que ψ est bijective, et expliciter son application réciproque.

7VJ **Exercice 20** ★ Soient $A, B\subset E$. On considère l'application $f\colon \begin{array}{ccc}\mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)\\ X & \mapsto & (X\cap A, X\cap B)\end{array}$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A\cup B=E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A\cap B=\emptyset$.
3. Si f est bijective, expliciter la bijection réciproque.

B51 **Exercice 21** ★ On admet que toute fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et injective est strictement monotone. On considère l'équation fonctionnelle $(*)\quad f\circ f\circ f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, d'inconnue $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Déterminer les fonctions continues vérifiant $(*)$.

Indication : *Il n'en existe qu'une seule.*

G40 **Exercice 22** ★ Existence d'un inverse à gauche/droite Soit $f\colon E\to F$.

1. Montrer que f est injective si et seulement s'il existe une fonction $g\colon F\to E$ telle que $g\circ f=\mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une fonction $g\colon F\to E$ telle que $f\circ g=\mathrm{Id}_F$.
   La question précédente utilise l'axiome du choix.
3. Montrer qu'il existe une injection de $E\to F$ si et seulement s'il existe une surjection $F\to E$.

Bijections

4DS **Exercice 23** Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad x\mapsto x^2+x+1$.

1. La fonction f est-elle injective ? Surjective ?
2. Expliciter un intervalle I maximal pour lequel f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
3. Déterminer une expression de l'application réciproque $g\colon f(I)\to I$.

UKI **Exercice 24** Montrer que $\varphi\colon(p,q)\mapsto 2^p(2q+1)$ est une bijection $\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}^*$.

0VX **Exercice 25** Soit X un ensemble et $\mathcal{F}(X,X)$ l'ensemble des fonctions $X\to X$. Pour $f\in\mathcal{F}(X,X)$, on considère $\Phi_f\colon\mathcal{F}(X,X)\to\mathcal{F}(X,X),\quad g\mapsto g\circ f$. Montrer que Φ_f est bijective si et seulement si f l'est.

N20 **Exercice 26** ♣ Paradoxe de Russel Soit E un ensemble.

1. Expliciter une injection $E\to\mathcal{P}(E)$.
2. ★ En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il n'existe pas de bijection $E\to\mathcal{P}(E)$.

Indication : *Étant donné une telle bijection, introduire une partie A judicieuse, et discuter selon si $f^{-1}(A)\in A$.*

Entre ensembles finis

5RL **Exercice 27** Quelques tiroirs Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère $a_0,a_1,\dots,a_n$ des entiers distincts.

1. Montrer qu'on peut en trouver deux distincts dont la différence soit divisible par n.
2. On suppose que les a_i appartiennent à $[\![1,2n]\!]$.
   a) Montrer qu'on peut en trouver deux premiers entre eux.
   b) ★ Montrer qu'on peut en trouver deux distincts tels que l'un divise l'autre.

GYB **Exercice 28** ★ Soit $p\geq 2$.

1. On considère $u_0,u_1\in[\![0,p-1]\!]$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit u_{n+2} comme le reste de la division euclidienne de $u_{n+1}+u_n$ par p. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.
2. On considère la suite de Fibonacci définie par $F_1=F_2=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Montrer qu'une infinité de termes de cette suite sont divisibles par p.

ZNS **Exercice 29** ★★ Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels distincts. On note C la longueur de la plus longue sous-suite croissante de $(a_i)_{i\leq n}$, et D de la plus longue sous-suite décroissante. Montrer que $CD\leq n$.

Relations binaires

E2M **Exercice 30** Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. On définit une relation binaire $\sim$ sur E par

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\sim(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\Leftrightarrow\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0, u_n=v_n.$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

0F0 **Exercice 31** Relation de conjugaison Soit $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On dit que $f,g\in E$ sont conjuguées, ce que l'on note $f\,\mathcal{R}_c\,g$, s'il existe $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bijective telle que $\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}=g$. Montrer que $\mathcal{R}_c$ est une relation d'équivalence.

QXY **Exercice 32** Fermeture transitive d'une relation Soit $\to_R$ une relation sur E. On définit une relation $\to_R^*$ sur E par $x\to_R^* y$ si et seulement s'il existe une suite $x_0,\dots,x_n$ d'éléments de E vérifiant $x_0=x$, $x_n=y$ et $\forall i\in[\![0,n-1]\!],\ x_i\to_R x_{x+1}$.

1. Montrer que $\to_R^*$ est transitive et reflexive. Comment l'interpréter vis-à-vis du graphe de la relation ?
2. Montrer que si $\to_R$ est symétrique, $\to_R^*$ est une relation d'équivalence. Quelles sont ses classes d'équivalences, vis-à-vis du graphe de la relation ?
3. Montrer que $\to_R^*$ est la plus petite relation reflexive et transitive contenant $\to_R$, c'est-à-dire que si $\to^+$ est une relation reflexive et transitive vérifiant $\forall x,y\in E,\ x\to_R y\Rightarrow x\to^+ y$, alors $\forall x,y\in E,\ x\to_R^* y\Rightarrow x\to^+ y$.